Equazioni di ricorrenza e Ordinamenti lineari

Informatica@SEFA 2017/2018 - Lezione 14

Massimo Lauria <massimo.lauria@uniroma1.it>*

Venerdì, 17 Novembre 2017

1 Ricorsione ed equazioni di ricorrenza

Analizzando il Mergesort abbiamo visto che il tempo di esecuzione di un algoritmo ricorsivo può essere espresso come **un'equazione di ricorrenza**, ovvero un'equazione del tipo

$$T(n) = \begin{cases} C & \text{when } n \leq c_0 \\ \sum_i a_i T(g_i(n)) + f(n) & \text{when } n > c_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove a_i, C e c_0 costanti positive intere e g_i e f sono funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, e vale sempre che $g_i(n) < n$.

Ad esempio il running time di Mergesort è $T(n) = 2T(n/2)+\Theta(n)$.[1] Mentre il running time della ricerca binaria è:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

Ci sono diversi metodi per risolvere le equazioni di ricorrenza, o comunque per determinare se $T(n)$ è $O(g)$ oppure $\Theta(g)$ per qualche funzione g.

*http://massimolauria.net/courses/infosefa2017/

[1] In molti casi non è necessario essere precisi nel quantificare $T(1)$, oppure quali sono i valori esatti di C e c_0. Nella maggior parte quei valori condizionano $T(n)$ solo di un fattore costante, che viene comunque ignorato dalla notazione asintotica. Lo stesso vale per la funzione $f(n)$: riscalarla incide sulla soluzione della ricorrenza per un fattore costante.

Spesso ci interessa solo l'asintotica e per di più a volte ci interessa solo una limitazione superiore dell'ordine di crescita.

1.1 Metodo di sostituzione

Si tratta di indovinare la soluzione della ricorrenza e verificarla dimostrandone la correttezza via induzione matematica. Ad esempio risolviamo la ricorrenza del Mergesort utilizzando come tentativo di soluzione $T(n) \leq cn \log n$ per c "grande abbastanza". Il caso base è verificato scegliendo $c > T(1)$. Assumiamo poi che `merge` utilizzi dn operazioni e che $c > d$. E utilizziamo l'ipotesi induttiva per sostituire nella ricorrenza.

$$T(n) = 2T(n/2)+dn \leq 2c(n/2)\log(n/2)+dn \leq cn \log n - cn + dn \leq cn \log n$$

L'uso dell'induzione per risolvere la ricorrenza può portare ad errori legati alla notazione asintotica. Facciamo conto che vogliamo dimostrare che $T(n) = O(n)$, ovvero $T(n) \leq cn$ per qualche c.

$$T(n) = 2T(n/2) + dn \leq 2cn/2 + dn \leq cn + dn$$

Si sarebbe tentati di dire che $(c + d)n = O(n)$ e che quindi ci siamo riusciti. Tuttavia la dimostrazione usa l'ipotesi induttiva che $T(n') \leq cn'$ per $n' < n$ e quindi se da questa ipotesi non deduciamo la stessa forma $T(n) \leq cn$ l'induzione non procede correttamente.

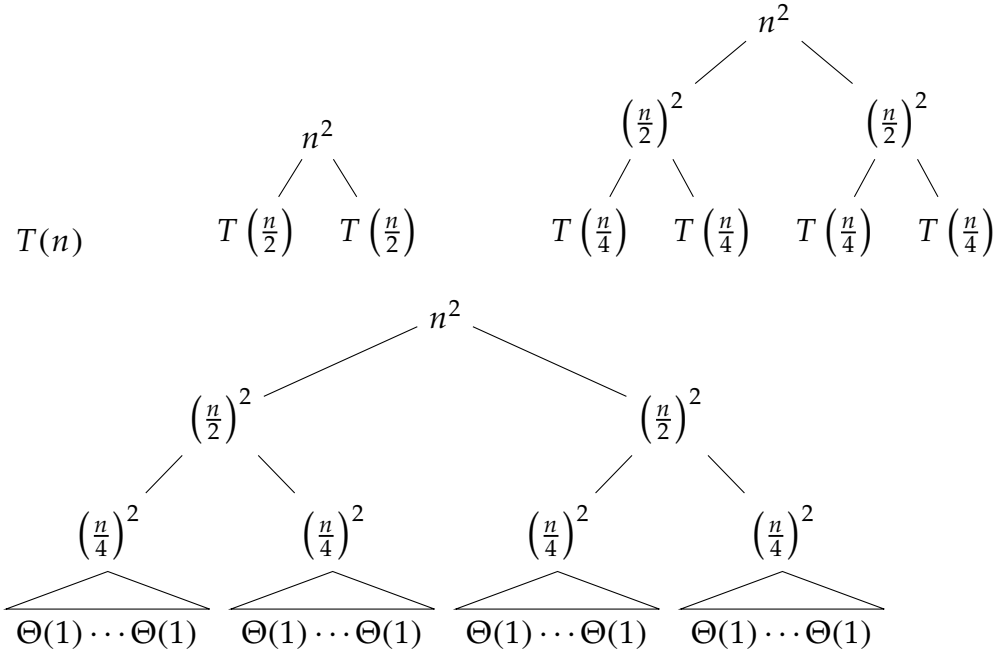
1.2 Metodo iterativo e alberi di ricorsione

É il metodo che abbiamo utilizzato durante l'analisi delle performance di Mergesort. L'idea è quella di iterare l'applicazione della ricorrenza fino al caso base, sviluppando la formula risultante e utilizzando manipolazioni algebriche per determinarne il tasso di crescita.

Esempio: Analizziamo la ricorrenza $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \quad & n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
= \quad & n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9T(\lfloor n/16 \rfloor) \\
= \quad & n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \\
= \quad & \dots \\
\leq \quad & n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots + 3^{\log_4(n)}\Theta(1) \\
\leq \quad & n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta(n^{\log_4(3)}) \\
= \quad & 4n + o(n) = O(n)
\end{aligned}
$$

Per visualizzare questa manipolazione è utile usare un **albero di ricorsione**. Ovvero una struttura ad albero che descrive l'evoluzione dei termini della somma. Vediamo ad esempio $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



- L'albero ha $\log n$ livelli
- Il primo livello ha n^2 operazioni, il secondo ne ha $n^2/2$, il terzo ne ha $n^2/4, \ldots$
- L'ultimo ha $\Theta(n)$ operazioni.

il numero totale di operazioni è $\Theta(n) + n^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \Theta(n^2)$

1.3 Master Theorem

Questi due metodi richiedono un po' di abilità e soprattutto un po' di improvvisazione, per sfruttare le caratteristiche di ogni esempio. Esiste un teorema che raccoglie i casi più comuni e fornisce la soluzione della ricorrenza direttamente.

Teorema 1. *Siano $a \geq 1$ e $b \geq 1$ costanti e $f(n)$ una funzione, e $T(n)$ definito sugli interi non negativi dalla ricorrenza:*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \ ,$$

dove n/b rappresenta $\lceil n/b \rceil$ o $\lfloor n/b \rfloor$. Allora $T(n)$ può essere asintoticamente limitato come segue

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ per qualche costante $\epsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log n)$;*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, per qualche costante $\epsilon > 0$, e se $a f(n/b) < c f(n)$ per qualche $c < 1$ e per ogni n sufficientemente grande, allora $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Notate che il teorema non copre tutti i casi. Esistono versioni molto più sofisticate che coprono molti più casi, ma questa versione è più che sufficiente per i nostri algoritmi.

- Mergesort è il caso 2, con $a = b = 2$ e $f(n) = \Theta(n)$.
- Ricerca binaria è il caso , con $a = 1$, $b = 2$ e $f(n) = \Theta(1)$.
- $T(n) = 2T(n/2) + n^2$ è il caso 3.

Non vedremo la dimostrazione ma è sufficiente fare uno sketch dell'abero di ricorsione per vedere che questo ha

- altezza $\log_b n$;
- ogni nodo ha a figli;
- al livello più basso ci sono $a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$ nodi che costano $\Theta(1)$ ciascuno;
- i nodi a distanza i da quello iniziale costano, complessivamente, $a^i f(n/b^i)$.

Dunque il costo totale è: $\Theta(n^{\log_b(a)}) + \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j f(n/b^j)$. In ognuno dei tre casi enunciati dal teorema, l'asintotica è quella indicata.

2 Ordinamenti in tempo lineare

Esistono modi di ordinare che impiegano solo $\Theta(n)$, ma questi metodi non sono, ovviamente, ordinamenti per confronto. Sfruttano invece il fatto che gli elementi da ordinare appartengano ad un dominio limitato.

2.1 Esempio: Counting Sort

Il counti sort si basa su un idea molto semplice: se ad esempio dobbiamo ordinare una sequenza di n elementi, dove ognuno dei quali è un numero da 1 a 10, possiamo farlo facilmente in tempo lineare:

1. tenendo 10 contatori $n_1, \ldots, n_{10}$;
2. fare una scansione della lista aggiornando i contatori;
3. riporre nella lista n_1 copie di 1, n_2 copie di 2, ecc. . .

```
def countingsort1(seq):
    if len(seq)==0:
        return
    # n operazioni
    a = min(seq)
    b = max(seq)
    # creazione dei contatori
    counter=[0]*(b-a+1)
    for x in seq:
        counter[x-a] += 1
    # costruzione dell'output
    output=[]
    for v,nv in enumerate(counter,start=a):
        output.extend( [v]*nv  )
    return output

print(countingsort1([7,6,3,5,7,9,3,2,3,5,6,7,8,8,9,9,5,4,3,2,2,3,4,6,8,8]))
```

```
[2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9]
```

Ovviamente qualunque tipo di dato ha un minimo e un massimo, in una lista finita. Tuttavia se la lista contiene elementi in un dominio molto grande (e.g. numeri tra 0 e n^{10} dove n è la lunghezza dell'input) allora questo algoritmo è meno efficiente degli algoritmi per confronti.

2.2 Dati contestuali

Negli algoritmi di ordinamento per confronto ci i dati originali vengono spostati o copiati all'interno della sequenza, e tra la sequenza ed eventuali liste temporanee.

Si immagini ad esempio il caso in cui ogni elemento nella lista di input sia una tupla `(i,dati)` dove `i` è la **chiave** rispetto a cui ordinare, ma `dati` invece è informazione contestuale arbitraria. Negli ordinamenti per confronto l'informazione contestuale viene spostata insieme alla chiave. La nostra implementazione del countingsort non gestisce questo caso, e va modificata.

1. Dati i contatori n_i, calcoliamo in quale intervallo della sequenza di output vadano inseriti gli elementi in input con chiave i. L'intervallo è tra le due quantità $\sum_{j=0}^{i-1} n_j$ (incluso) e $\sum_{j=0}^{i} n_j - 1$ (escluso).
2. Scorriamo l'input nuovamente e copiamo gli elementi in input nella lista di output.

```
def countingsort2(seq):
    if len(seq)==0:
        return
    # n operazioni
    a = min(k for k,_ in seq)
    b = max(k for k,_ in seq)

    # creazione dei contatori
    counter=[0]*(b-a+1)
    for k,_ in seq:
        counter[k-a] += 1
    # posizioni finali di memorizzazione
    posizioni=[0]*(b-a+1)
    for i in range(1,len(counter)):
        posizioni[i]=posizioni[i-1]+counter[i-1]

    # costruzione dell'output
    for k,data in seq[:]:
        seq[posizioni[k-a]]=(k,data)
        posizioni[k-a] += 1

sequenza=[(3,"paul"),(4,"ringo"),(1,"george"),(1,"pete"),(3,"stuart"),(4,"john")
    ]
countingsort2(sequenza)
print(sequenza)
```

```
[(1, 'george'), (1, 'pete'), (3, 'paul'), (3, 'stuart'), (4, 'ringo'), (4, 'john')]
```

3 Ordinamento stabile

Nell'esempio precedente abbiamo visto che ci sono elementi diversi che hanno la stessa chiave di ordinamento. In generale una lista da ordinare può contenere elementi "uguali" nel senso che seppure distinti, per quanto riguarda l'ordinamento possono essere scambiati di posizione senza problemi, ad esempio `(1,'george')` e `(1,"pete")` possono essere invertiti nella ordinata, senza che l'ordinamento sia invalidato.

Si dice che un ordinamento è **stabile** se non modifica l'ordine relativo degli elementi che hanno la stessa chiave. Un'inversione nell'ordinamento di una sequenza `S` è una coppia di posizioni `i`, `j` nella lista, $0 \leq$ `i` $<$ `j` $<$ `len(S)` , tali che il valori in `S[i]` si trova dopo il valore in `S[j]` una volta finito l'ordinamento. Un ordinamento stabile minimizza il numero di inversioni.

Tutti gli ordinamenti che abbiamo visto fino ad ora sono stabili. Per esempio nel caso di ordinamenti per confronto è capitato di dover fare operazioni del tipo

```
if S[i] <= S[j]:
   operazioni che non causano un'inversione tra S[i] e S[j]
else:
   operazioni che causano un'inversione tra S[i] e S[j]
```

dove `i` è minore di `j`. Se invece dell'operatore <= avessimo utilizzato l'operatore < allora il comportamento dell'algoritmo sarebbe cambiato solo nel caso in cui `S[i]` fosse stato uguale a `S[j]`. L'ordinamento sarebbe stato comunque valido ma non sarebbe più stato un ordinamento stabile.

3.1 Ordinamenti multipli a cascata

Se avete una lista di brani nel vostro lettore musicale tipicamente avrete i vostri brani ordinati, semplificando, per

1. Artista
2. Album
3. Traccia

nel senso che i brani sono ordinati per Artista, quelli dello stesso artista sono ordinati per Album, e quelli nello stesso album sono ordinati

Un modo per ottenere questo risultato è ordinare prima per Traccia, poi per Album, e poi per Artista. Questo avviene perché gli ordinamenti usati sono stabili. Quando si ordina per Album, gli elementi con lo stesso Album verrano mantenuti nelle loro posizioni relative, che erano ordinate per Traccia. Successivamente una volta ordinati per Artista, i brani dello stesso Artista mantengono il loro ordine relativo, ovvero per Album e Traccia.

In generale è possibile ordinare rispetto a una serie di chiavi differenti, `key1`, `key2`, ... `keyN`, in maniera gerarchica, ordinando prima rispetto `keyN` e poi andando su fino a `key1`. Modifichiamo `countinsort` per farlo lavorare su una chiave di ordinamento arbitraria.

```
def default_key(x):
    return x

def countingsort(seq,key=default_key):
    if len(seq)==0:
        return
    # n operazioni
    a = min(key(x) for x in seq)
    b = max(key(x) for x in seq)
    # creazione dei contatori
    counter=[0]*(b-a+1)
    for x in seq:
        counter[key(x)-a] += 1
    # posizioni finali di memorizzazione
    posizioni=[0]*(b-a+1)
    for i in range(1,len(counter)):
        posizioni[i]=posizioni[i-1]+counter[i-1]
    # costruzione dell'output
    for x in seq[:]:
        seq[posizioni[key(x)-a]]=x
        posizioni[key(x)-a] += 1
```

4 Ordinare sequenze di interi grandi Radixsort

Abbiamo già detto che il `countingsort` è un ordinamento in tempo lineare, adatto a ordinare elementi le cui chiavi di ordinamento hanno un range molto limitato. Ma se i numeri sono molto grandi che possiamo fare?

Non possiamo ordinare una lista di 1000000 di numeri positivi da 32 bit con il counting sort, perché la lista dei contatori sarebbe enorme (e piena di zeri). Però possiamo considerare un numero di 32 come una tupla di 32 elementi $b_{31} \dots b_0$ in $\{0, 1\}$ ed utilizzare un ordinamento stabile per

- ordinare rispetto a b_0

- ordinare rispetto a b_1
- ...
- ordinare rispetto a b_{31}

Invece di lavorare bit per bit possiamo considerare un numero di 32 come una tupla di 4 elementi $b_3b_2b_1b_0$ in $\{0,\ldots,255\}$ ed utilizzare un ordinamento stabile per

- ordinare rispetto a b_0
- ordinare rispetto a b_1
- ordinare rispetto a b_2
- ordinare rispetto a b_3

Naturalmente usare una decomposizione più fitta richiede più chiamate ad ordinamento, ma ognuno su un dominio più piccolo. Il giusto compromesso dipende dalle applicazioni. Ora calcoliamo le chiavi b_i utilizzando quattro funzioni.

```
def key0(x):
    return x & 255

def key1(x):
    return (x//256) & 255

def key2(x):
    return (x//(256*256)) & 255

def key3(x):
    return (x//(256*256*256)) & 255

x =2**31 + 2**18 + 2**12 -1
print(key0(x), key1(x), key2(x), key3(x))
```

```
255 15 4 128
```

Dunque possiamo implementare `radixsort` (che ricordiamo, per come è stato realizzato funziona solo su numeri positivi di 32 bit).

```
def radixsort(seq):
    for my_key in [key0,key1,key2,key3]:
        countingsort(seq,key=my_key)


sequenza=[7,6,873823,5,7,9,3,2,12333,5,6132,7,8,1328,9,9,5,463432,4,3426,8,8]
radixsort(sequenza)
print(sequenza)
```

```
[2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 1328, 3426, 6132, 12333, 463432, 873823]
```

4.1 Plot di esempio

In questo plot vediamo il tempo impiegato da questi algoritmi per ordinare una lista di numeri tra 0 e 1000000. Questi algoritmi sono molto più veloci di `bubblesort` e `insertionsort` e questo si vede anche in pratica. Le liste di numeri non sono particolarmente lunghe (solo 100000 elementi), ma impossibili da ordinare utilizzando ordinamenti $\Theta(n^2)$. Vediamo tre algoritmi:

- Mergesort
- Countingsort con intervallo [0,10000] e [0,1000000]
- Radixsort con 4 chiavi da 8 bit e con 2 chiavi da 16 bit

Il running time di `countingsort` è molto più condizionato dall'intervallo di valori che dalla lunghezza della sequenza da ordinare (almeno per soli 100000 elementi da ordinare).

Radixsort utilizza più chiamate a `countingsort` ma su un dominio più piccolo. Due chiavi a 16 bit sono più efficienti di 4 chiavi a 8 bit, e 16 bit producono uno spazio delle chiavi di 65536 elementi. Uno spazio più semplice da gestire per `countingsort` rispetto ad un dominio di `1000000` elementi.